4/ a- $G_n(x) = (-1)^n \int_x^0 e^{nt}dt = (-1)^n \left[\frac{1}{n}e^{nt}\right]_x^0$

$G_n(x) = (-1)^n \frac{1-e^{nx}}{n}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} G_n(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-1)^n \frac{1-e^{nx}}{n} = \frac{(-1)^n}{n}$ **car** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{nx} = 0$.

b- $G_1(x) + G_2(x) + G_3(x) + \ldots + G_n(x)$

$= (-1)^1 \int_x^0 e^t dt + (-1)^2 \int_x^0 e^{2t}dt + (-1)^3 \int_x^0 e^{3t}dt + \ldots + (-1)^n \int_x^0 e^{nt}dt$

$= \int_x^0 \left[(-1)^1 e^t + (-1)^2 e^{2t} + (-1)^3 e^{3t} + \ldots + (-1)^n e^{nt}\right]dt$

$= \int_x^0 (-e^t)\left[1 + (-e^t) + (-e^t)^2 + \ldots + (-e^t)^{n-1}\right]dt$

$= \int_x^0 (-e^t)\frac{1-(-e^t)^n}{1-(-e^t)}dt$ **car** $1+(-e^t)+(-e^t)^2+\ldots+(-e^t)^{n-1}$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $q = -e^t$.

$= \int_x^0 \left[-\frac{e^t}{1+e^t} + (-1)^2(-1)^n \frac{e^t e^{nt}}{1+e^t}\right]dt$

$= -\int_x^0 \frac{e^t}{1+e^t}dt + (-1)^n \int_x^0 \frac{e^{(n+1)t}}{1+e^t}dt = \underline{-F_1(x) + (-1)^n F_{n+1}(x).}$

5/a- On vient de prouver que $\forall x \leqslant 0$ et $\forall n \in IN^*$

$\sum_{k=1}^{n} G_k(x) = G_1(x)+G_2(x)+G_3(x)+\ldots+G_n(x) = -F_1(x) + (-1)^n F_{n+1}(x)$

et comme chaque fonction figurant dans cette dernière égalité admet une limite finie quand x tend vers $(-\infty)$ alors

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sum_{k=1}^{n} G_k(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} [-F_1(x) + (-1)^n F_{n+1}(x)]$

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \lim\limits_{x\to-\infty} G_k(x) = -\lim\limits_{x\to-\infty} F_1(x) + (-1)^n \lim\limits_{x\to-\infty} F_{n+1}(x)$

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = -\text{Log}2 + (-1)^n R_{n+1}$

$\Leftrightarrow -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = -\text{Log}2 - (-1)^{n+1} R_{n+1}$

$\Leftrightarrow \underline{u_n = \text{Log}2 + (-1)^{n+1} R_{n+1}}$

b- $\forall n \in IN^*; u_n = \text{Log}2 + (-1)^{n+1} R_{n+1}$